Ergänzungen

Part C: Vermutung über 0-1-einfache Verbände

Im Einstiegsproblem 2 wurde darauf hingewiesen, dass bezüglich nicht-einfachen, 0-1-einfachen Verbänden eine Vermutung entstanden ist. Diese soll hier als Satz formuliert und bewiesen werden (siehe auch Definition B.25 - Einfache Algebra, Definition B.28 - 0-1-einfach und Remark B.29 - 0-1-einfach).

Proposition C.1 - Satz 0-1-einfach

Sei M der in Abbildung C.3 dargestellte Verband und seien die drei Schritte S1, S2 und S3 gegeben, welche auf einen Verband L mit 0 und 1 angewendet werden können:

S1: Spalten eines Punktes in einer Kette zwischen 0 und 1. Sei $x \in C \in L$ ein Punkt in einer Kette zwischen 0 und 1, für welche gilt: Jedes $c \in C$ hat genau einen unteren Nachbarn c_u und genau einen oberen Nachbarn c_o. Schiebe einen neuen Punkt x' zwischen x und x_u, so dass $x_u < x' < x < x_o$ gilt.

S2: Hinzufügen eines Punktes zwischen 0 und 1. Füge dem Verband L einen neuen Punkt x mit $0 < x < 1$ hinzu, der mit allen anderen Elementen $y \in L \setminus \{0,1\}$ unvergleichbar ist.

S3: Einkleben eines Verbandes zwischen zwei Punkte in einer Kette zwischen 0 und 1. Seien $x, y \in C \in L$ zwei benachbarte Punkte ($x < y$, $x \neq 0$, $y \neq 1$) in einer Kette zwischen 0 und 1, für welche gilt: Jedes $c \in C$ hat genau einen unteren Nachbarn c_u und genau einen oberen Nachbarn c_o. Schiebe einen nicht-einfachen Verband L' mit einem minimalen Element $0_{L'}$ und einem maximalen Element $1_{L'}$ so zwischen x und y, dass $y = 0_{L'}$ und $x = 1_{L'}$ gelten.

Dann gilt:

a. M ist der kleinste nicht-einfache, 0-1-einfache Verband.
b. Werden in beliebiger Reihenfolge und mit beliebig häufigen Wiederholungen die Schritte S1, S2 und S3 auf den Verband M angewendet, ist das Resultat immer ein nicht-einfacher, 0-1-einfacher Verband.

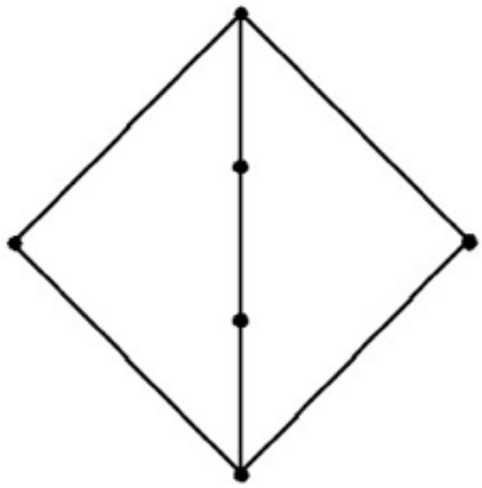

Abbildung C.3: Der Verband M

Beweis C.1

Um zu zeigen, dass der Verband M der kleinste mit der gewünschten Eigenschaft ist, ist zu überlegen, wie Verbände, die kleiner oder gleich gross sind, aussehen. Abbildung C.4 zeigt diese Verbände.

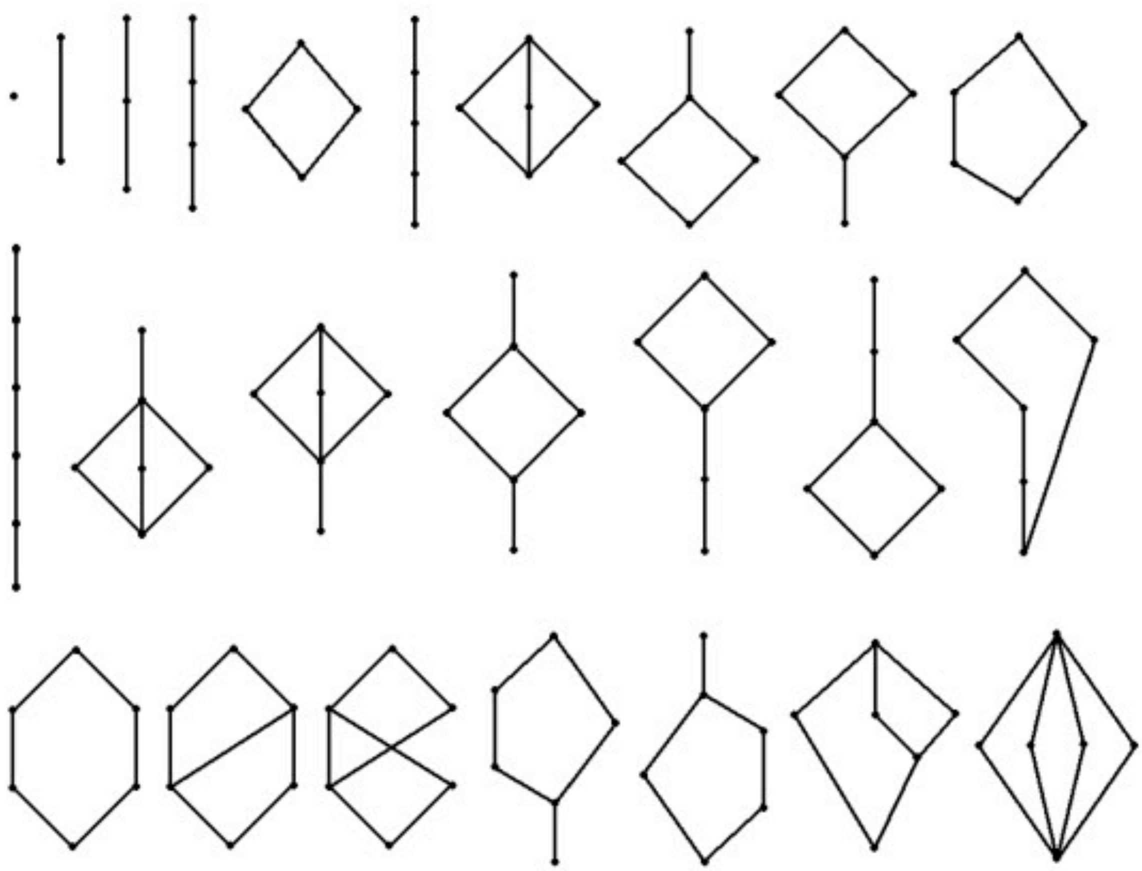

Abbildung C.4: Alle Verbände mit bis zu sechs Elementen (ohne Verband M)

Es lässt sich einfach nachprüfen (mit Hilfe der Kongruenzenberechnung der AWB), dass keiner der Verbände mit höchstens 6 Elementen, ausser dem Verband M natürlich, sowohl nicht-einfach wie auch 0-1-einfach ist. Also muss der Verband M der kleinste dieser Art sein.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Schritte S1, S2 und S3 diese Eigenschaften erhalten. Folgender Satz wird bei diesem Unterfangen behilflich sein:

Satz C.2 - Drei-Stränge Behauptung

Jeder Verband, der aus mindestens drei Strängen zusammengeklebt wurde, ist 0-1-einfach. Dabei ist ein *Strang* ein Verband L, dessen Maximum 1_L $\vee$-irreduzibel und dessen Minimum 0_L $\wedge$-irreduzibel ist (siehe Definition A.22 - $\vee$- resp. $\wedge$-irreduzibel).

Zusammengeklebt werden die Stränge L_1, ..., L_n durch die Vereinigung $L_1 \cup ... \cup L_n$, wobei ihre grössten Elemente 1_{L_1}, ..., 1_{L_n} miteinander identifiziert werden und ihre kleinsten Elemente 0_{L_1}, ..., 0_{L_n} miteinander identifiziert werden.

Beweis C.2

Sei K ein Verband mit mindestens drei Strängen und $x \in K \setminus \{0,1\}$ ein Element, für welches gilt: $x\Theta 1$ für ein $\Theta \in \mathrm{Con}K$. Wähle nun ein mit x unvergleichbares Element $y \in K$ und setze $a_1 := x$, $a_2 := y$, $b_1 := 1$ und $b_2 := y$. Es gilt also $a_1 \; \Theta \; b_1$ und $a_2 \; \Theta \; b_2$. Weil die Kongruenz Θ Schnitt und Verein erhält, gilt $0 = a_1 \wedge a_2 \Theta b_1 \wedge b_2 = y$. Jedes $y \in K \setminus \{1,x\}$ gehört also zur selben Kongruenzklasse wie die 0.

Weil K mindestens drei Stränge besitzt, gibt es unter ebendiesen Elementen zwei unvergleichbare Elemente y_1 und y_2, für welche $y_1 \vee y_2 = 1$ gilt. Nach Bemerkung B.21 muss also die 1 und damit alle Elemente von K zur selben Kongruenzklasse gehören wie die 0. Also gilt $\Theta = \nabla_K\}$.

Analog lässt sich zeigen, dass aus $x\Theta 0$ für ein $\Theta \in \mathrm{Con}K$ die Gleichheit $\Theta = \nabla_K$ folgen muss.

In K gibt es also keine Kongruenz (ausser ∇_K), bei welcher sich die 1 oder die 0 mit anderen Elementen des Verbandes die Klasse teilen müssen. K muss also ein 0-1-einfacher Verband sein - und der Satz C.2 ist bewiesen. ∎

Der "Ausgangsverband" M besteht aus mindestens drei Strängen. An dieser Tatsache vermögen alle drei Schritte S1, S2 und S3 nichts zu verändern: Beim Spalten eines Punktes in einer Kette zwischen 0 und 1 bleibt die Anzahl der Stränge konstant (S1). Beim Hinzufügen eines Punktes zwischen 0 und 1 wird die Anzahl der Stränge um 1 erhöht (S2). Das Einkleben eines Verbandes zwischen zwei Punkte in einer Kette zwischen 0 und 1 verändert die Anzahl der Stränge nicht. Also ist jeder Verband, der ausgehend vom Verband M mittels Konstruktion aus Satz 3.1 gebildet wird, 0-1-einfach.

> Es bleibt noch zu zeigen, dass die so konstruierten Verbände nicht-einfach sind. Aufgrund der Gestalt vom Verband M und den Schritten S1 bis S3 ist klar, dass ein nach Satz 3.1 konstruierter Verband M' immer einen Strang $L \subseteq M'$ besitzen muss, der nebst den extremen Elementen $0_L \cong 0$ und $1_L \cong 1$ mehr als nur ein einziges Element besitzt. Es gibt also eine Kongruenz von M', welche alle Elemente von $x \in L \setminus \{0, 1\}$ miteinander identifiziert, während alle restlichen Elemente (insbesondere die 0 und die 1) selbst eine Klasse bilden. Diese Kongruenz entspricht aber weder $\Delta_{M'}$ noch $\nabla_{M'}$. Der Verband M' ist also nicht einfach. Damit ist der Satz C.1 bewiesen. ∎

Es ist naheliegend zu fragen, ob jeder nicht-einfache, 0-1-einfache Verband mit der Konstruktion aus Satz C.1 erstellt werden kann. Folgendes Beispiel zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist.

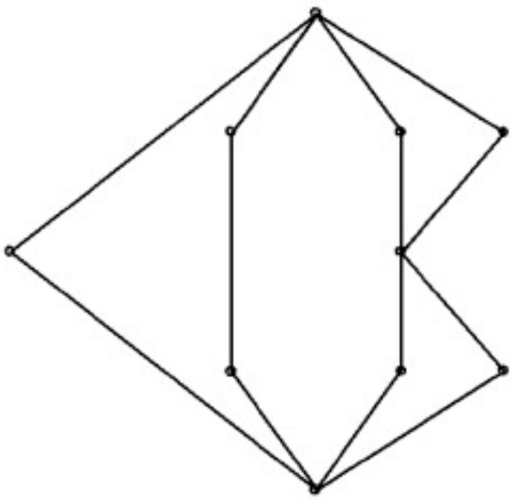

Abbildung C.5: Verband mit zwei verbundenen Strängen

Der Verband in der Abbildung C.5 kann nicht durch Zusammenkleben von Strängen gebildet werden (siehe Satz C.2). Weil er zwei Stränge besitzt, die nicht nur bei 0 und 1 miteinander verklebt sind, kann er nicht ausgehend von M mithilfe der Schritte S1, S2 und S3 erreicht werden.

Also ist durch den Satz C.1 eine Konstruktion gegeben, mit der beliebig viele nicht-einfache, 0-1-einfache Verbände konstruiert werden können, die aber nicht zu allen solchen Verbänden führt.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on September 4, 2006.