Ergänzungen

Part C: Dedekind-MacNeille-Vervollständigung

In diesem Abschnitt geht es darum, zu verstehen, was bei einer Dedekind-MacNeille-Vervollständigung eines posets genau vor sich geht. Die theoretische Grundlage ist im Satz A.13 und den dazu notwendigen Definitionen gegeben.

Am besten ist an einem konkreten Beispiel zu sehen, wie aus einem beliebigen poset ein Verband "gezaubert" wird. Unsere Ausgangslage soll das poset **P** = (X, P) in Abbildung C.1 sein.

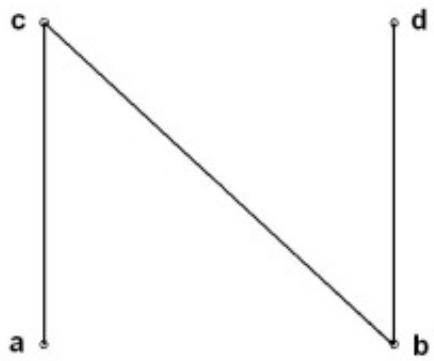

Abbildung C.1: Ein poset **P**

P ist sicher kein Verband, da zum Beispiel die Elemente c und d kein Supremum haben. Also macht es Sinn, nach einer Vervollständigung zu fragen, die dann ein (vollständiger) Verband sein muss.

Da wir am Bild des Operators Γ_{UL}, angewendet auf die Grundmenge X unseres posets, interessiert sind, bleibt uns nichts anderes übrig, als die Werte von Γ_{UL} für alle Teilmengen von X zu berechnen:

Teilmenge A von X	A^U	$\Gamma_{UL}(A) = (A^U)^L$
$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b, c, d\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{d\}$	$\{d\}$	$\{b, d\}$
$\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, c\}$	$\{c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, d\}$	$\varnothing$	$\{a, b, c, d\}$

$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{b,d\}$	$\{d\}$	$\{b,d\}$
$\{c,d\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c,d\}$
$\{a,b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b,d\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c,d\}$
$\{a,c,d\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c,d\}$
$\{b,c,d\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c,d\}$
$\{a,b,c,d\}$	$\varnothing$	$\{a,b,c,d\}$

Der Operator Γ_{UL} produziert also folgende Menge

$$\mathrm{im}(\Gamma_{UL}) = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{b,d\},\ \{a,b,c\},\ \{a,b,c,d\}\}.$$

Wir wissen aus dem Satz A.13 - Dedekind-MacNeille, dass wir diese Elemente nur noch durch die Mengeninklusion $\subseteq$ ordnen müssen, um zum gewünschten (vollständigen) Verband zu gelangen, der sich dicht um unser poset **P** legt. Die Abbildung C.2 zeigt unser Resultat.

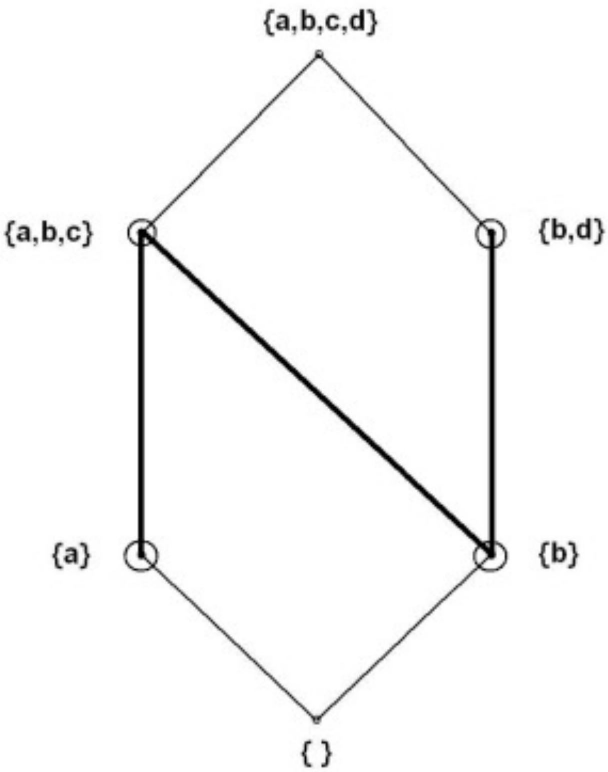

Abbildung C.2: Dedekind-MacNeille-Vervollständigung des posets **P**

Die Einbettung durch die Funktion ϕ_X, welche jedem Element aus X sein Down-set zuordnet ($\phi_X(a) = \{a\}$, $\phi_X(b) = \{b\}$, $\phi_X(c) = \{a,b,c\}$, $\phi_X(d) = \{b,d\}$), ist im Bild nun deutlich erkennbar.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on July 22, 2006.