Definitionen und Sätze

Teil A: Ordnungstheorie 1

Der zentrale Begriff der Ordnungstheorie ist die Teilgeordnete Menge. Darum soll er an dieser Stelle definiert werden.

Definition A.1 – Teilordnung, Poset

Eine zweistellige Relation $\leq$ auf einer Menge A heisst *Teilordnungsrelation*, falls für alle $x, y, z \in A$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

Reflexivität	$x \leq x$
Antisymmetrie	$x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
Transitivität	$x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

In diesem Fall nennt man das Paar $\mathbf{A} = (A, \leq)$ eine *Teilordnung* oder *Poset*.

Definition A.2 – Extreme Elemente, Nachbarn

Sei $\mathbf{A} = (A, \leq)$ ein Poset, $B \subseteq A$ eine Teilmenge von A. Ein *maximales Element* von B ist ein Element $b \in B$ mit $b < a \Rightarrow a \notin B$ für alle $a \in A$. Das *Maximum* von B ist ein Element $b \in B$ mit $b' \leq b$ für alle $b' \in B$.

Ein *minimales Element* von B ist ein Element $b \in B$ mit $a < b \Rightarrow a \notin B$ für alle $a \in A$. Das *Minimum* von B ist ein Element $b \in B$ mit $b \leq b'$ für alle $b' \in B$.

Man nennt b einen *oberen Nachbarn* von a (resp. a einen *unteren Nachbarn* von b), falls $a \leq b$ und es gibt kein $x \neq a, b$ mit $a \leq x \leq b$.

Es ist üblich, Posets $\mathbf{A} = (A, \leq)$ mittels sogenannten *Hasse-Diagrammen* darzustellen. Die Elemente von A werden als Punkte oder Kreislein dargestellt, verbindende Geradenstücke geben die Ordnung wieder: b wird oberhalb von a gezeichnet und mit ihm verbunden, falls b oberer Nachbar von a ist. In einem Hasse-Diagramm sind alle Informationen eines Posets gespeichert. Es versteht sich, dass ein Hasse-Diagramm nicht eindeutig ist (vgl. Abbildung A).

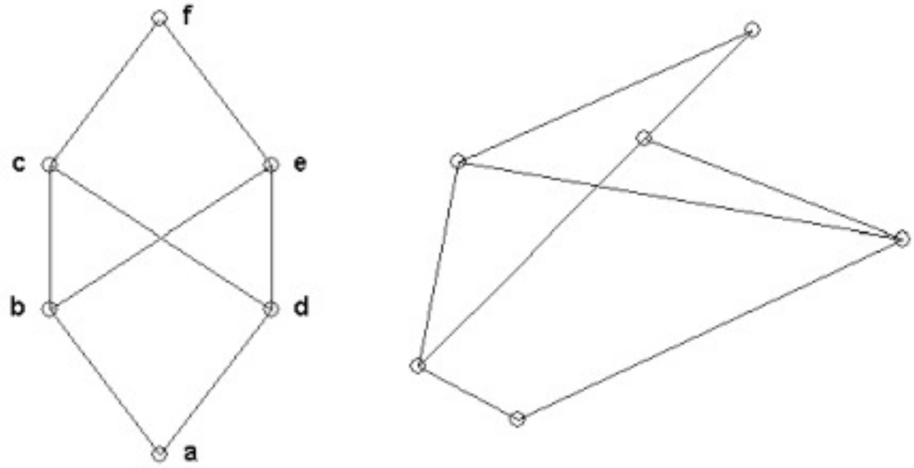

Abbildung A: Zwei Hasse-Diagramme desselben Posets

Bemerkung A.3 - Interpretation der Teilordnungsrelation ≤

In den Definitionen, Sätzen und Beispielen dieser Webseite verwenden wir im folgenden die Standardinterpretation der Ordnungsrelation ≤ und aller verwandten Relationen wie <, ≥, >,...

Eine Teilordnung zeichnet sich schon dem Wort nach dadurch aus, dass unter ihren Elementen nicht zwingend überall Ordnung herrschen muss. Das heisst etwas konkreter, dass es zwei Elemente geben kann, die man nicht miteinander vergleichen kann, die sich nicht ordnen lassen.

Im Folgenden sollen diese Tatsache und einige grundlegende Begriffe für Posets etwas mathematischer dargestellt werden.

Definition A.4 - Vergleichbarkeit

Sei **A** = (A, ≤) ein Poset. Zwei Elemente a, b ∈ A heissen *vergleichbar*, falls a ≤ b oder b ≤ a, und sonst *unvergleichbar.*

Definition A.5 - Kette

Eine *linear geordnete Menge* oder *Kette* ist ein Poset, in welchem zwei beliebige Elemente vergleichbar sind. Man nennt das Poset $\mathbf{C}_n$:= (C, ≤) eine *n-Kette*, falls C n Elemente besitzt, welche unter ≤ eine Kette bilden.

Definition A.6 - Subposet, Ordnungs-Homomorphismus, Ordnungs-Einbettung, Ordnungs-Isomorphismus

Ein Poset (B, $\leq_B$) heisst *Subposet* des Posets (A, $\leq_A$), falls B ⊆ A und $\leq_B \subseteq \leq_A$, d.h. für alle x, y ∈ B x $\leq_B$ y genau dann, wenn x $\leq_A$ y.

> Sind $(A, \leq_A)$ and $(B, \leq_B)$ Posets, dann nennt man eine Abbildung $f : A \to B$ *ordnungserhaltend* oder einen *Ordnungs-Homomorphismus*, falls aus $x \leq_A y$ stets $f(x) \leq_B f(y)$ folgt für alle $x, y \in A$.
>
> Ist f darüberhinaus injektiv und folgt aus $f(x) \leq_B f(y)$ stets $x \leq_A y$ für alle $x, y \in A$, dann heisst f *Ordnungs-Einbettung*.
>
> Surjektive Ordnungs-Einbettungen werden *Ordnungs-Isomorphismen* genannt.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on September 10, 2006.