Definitionen und Sätze

Teil A: Ordnungstheorie 2

Definition A.7 - Schranken, Infimum, Supremum

Sei **A** = (A, ≤) ein Poset, B ⊆ A eine Teilmenge von A. Ein Element a ∈ A heisst *obere Schranke* von B, falls b ≤ a für alle b ∈ B. Eine obere Schranke a von B heisst *kleinste obere Schranke* von B oder *Supremum* von B (sup B), falls a ≤ a' für alle oberen Schranken a' von B.

Ein Element a ∈ A heisst *untere Schranke* von B, falls b ≥ a für alle b ∈ B. Eine untere Schranke a von B heisst *grösste untere Schranke* von B oder *Infimum* von B (inf B), falls a ≥ a' für alle unteren Schranken a' von B.

Man schreibt oft x ∨ y ("x *Verein* y") für sup{x,y} und x ∧ y ("x *Schnitt* y") für inf{x,y}. (Siehe auch Schnitt in Kongruenzklasse)

Bemerkung A.8 - algebraisierbar

In der AWB heisst eine Ordnung genau dann *algebraisierbar*, wenn zumindest eine der Operationen Schnitt und Verein total definiert ist.

Zur Verdeutlichung der Definition A.5 - Kette hier einige Bemerkungen über das in Abbildung A (unten) dargestellte Poset **A** = (A, ≤):

{a, b, c} ⊆ A bildet eine Kette. Die Elemente b und d sind unvergleichbar, während zum Beispiel die Elemente a und f vergleichbar sind. Die Untermenge {a, b, c, d, e} besitzt kein Maximum, hingegen zwei maximale Elemente: c und e. Die Elemente c, e und f sind obere Schranken für diese Menge. Da aber keine kleinste obere Schranke existiert, besitzt die Menge {a, b, c, d, e} kein Supremum (ein Infimum schon: a). Das Element e hat in **A** genau einen oberer Nachbarn, nämlich das Element f.

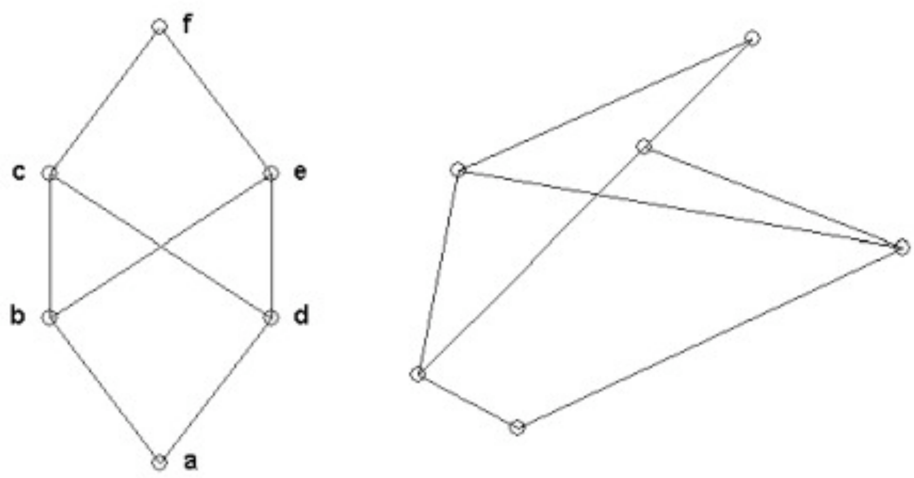

Abbildung A: Zwei Hasse-Diagramme desselben Posets

Nebst dem Poset spielt auch der Verband eine wichtige Rolle - und dies nicht ausschliesslich in der Ordnungstheorie.

Definition A.9 - Verband (siehe auch Definition B.2 - Verband)

Ein *Verband* ist ein Poset **A** = (A, ≤), für das gilt: Für alle x, y ∈ L existiert das Supremum sup{x,y} und das Infimum inf{x,y}.

Definition A.10 - Vollständiger Verband

Ein Verband ***A*** = (A, ≤) heisst *vollständig*, falls jede beliebige Teilmenge X ⊆ A ein Supremum und ein Infimum besitzt.

Bemerkung A.11

Nach Definition A.10 - Vollständiger Verband ist jeder endliche Verband vollständig.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on September 10, 2006.