Definitionen und Sätze

Part A: Ordnungstheorie 3

Es stellt sich die Frage, wie zu einem beliebigen Poset (X,P) ein möglichst kleiner vollständiger Verband gefunden werden kann, in welchen sich das Poset einbetten lässt. Die *Dedekind-MacNeille-Vervollständigung* liefert eine Antwort auf diese Frage. Um zu zeigen, wie diese Vervollständigung eines Posets genau funktioniert, müssen zuerst einige Begriffe eingeführt werden.

Definition A.12 - Down-Set, Up-Set, A^L, A^U

Sei (X,P) ein Poset, $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir definieren:

- $\downarrow A = \{x \in X : \exists a \in A \text{ mit } x \leq a\}$ (Down-Set von A)
- $\uparrow A = \{x \in X : \exists a \in A \text{ mit } a \leq x\}$ (Up-Set von A)
- $\downarrow x = \downarrow\{x\}$
- $\uparrow x = \uparrow\{x\}$
- $A^L = \{x \in X : x \leq a \ \forall a \in A\}$ (Menge der unteren Schranken von A)
- $A^U = \{x \in X : a \leq x \ \forall a \in A\}$ (Menge der oberen Schranken von A)

Wir suchen schlussendlich einen möglichst kleinen Verband, in den das Poset passt. Das heisst, dass das Poset dicht an den Verband heran kommt. Etwas mathematischer ausgedrückt:

Definition A.13 - Dichtheit

Sei (X, P) ein Poset. Dann heisst $S \subseteq X$ $\wedge$-*dicht* resp. $\vee$-*dicht*, falls es für alle $x \in X$ ein $T \subseteq S$ gibt mit $\inf T = x$ resp. $\sup T = x$.

Ist S sowohl $\wedge$-dicht wie auch $\vee$-dicht, so heisst S *dicht*.

Definition A.14 - (Γ_{UL})

Sei (X, P) ein Poset. Der (Hüllen-)Operator Γ_{UL} ist wie folgt definiert:

$$\Gamma_{UL}: A \subseteq X \mapsto (A^U)^L$$

Satz A.15 - Dedekind-MacNeille (Cf. auch Dedekind-MacNeille-Vervollständigung)

Sei (X, P) ein Poset und $DM(X, P) = (im(\Gamma_{UL}), \subseteq)$. $\phi: X \to \mathcal{P}(X)$ ist gegeben durch $x \mapsto \downarrow x$. Dann gilt:

a. DM(X, P) ist ein vollständiger Verband
b. ϕ ist eine Ordnungseinbettung
c. Ist (X, P) bereits ein vollständiger Verband, dann ist $(X, P) \cong DM(X, P)$,

insbesondere ist ϕ ein Verbandsisomorphismus.

d. $\phi(X)$ liegt dicht in DM(X, P)

Bemerkung A.16

Das Poset DM(X, P) = $(\mathrm{im}(\Gamma_{UL}), \subseteq)$ zusammen mit der Einbettung ϕx wird Dedekind-MacNeille-Vervollständigung des Posets (X, P) genannt. Es ist der gesuchte kleinste vollständige Verband, welcher das Poset (X, P) enthält.

Siehe auch die Illustration in Part C: Dedekind-MacNeille-Vervollständigung.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on September 10, 2006.