

Definitionen und Sätze

Part A: Ordnungstheorie 4

Bevor der ordnungstheoretische Teil abgeschlossen wird, soll noch eine schöne Anwendung von kritischen und schwach kritischen Paaren aufgezeigt werden.

Definition A.17 – Kritisches Paar

Sei $\mathbf{P} = (X, P)$ ein Poset. (x, y) heisst *kritisches Paar*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. x und y sind unvergleichbar
2. $a < x \Rightarrow a < y \quad \forall a \in X$
3. $b > y \Rightarrow b > x \quad \forall b \in X$

Bemerkung A.18

(x, y) kritisches Paar $\not\Rightarrow (y, x)$ kritisches Paar.

Definition A.19 – Schwach Kritisches Paar

Sei $\mathbf{P} = (X, P)$ ein Poset. (x, y) heisst *schwach kritisches Paar*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $x \not\leq y$
2. $a < x \Rightarrow a \leq y \quad \forall a \in X$
3. $b > y \Rightarrow b \geq x \quad \forall b \in X$

Bemerkung A.20

Jedes kritische Paar ist auch ein schwach kritisches Paar. Ein schwach kritisches Paar, welches nicht kritisch ist, wird im Folgenden auch *echt* schwach kritisch genannt.

Definition A.21 – Maximaler 0-1-Unterverband

Sei L ein endlicher, distributiver Verband ($L \in DL_{\text{fin}}$) und $M \subseteq L$ eine Teilmenge.

M ist ein *0-1-Unterverband* von L , falls M ein Unterverband von L ist mit $0_L, 1_L \in M$.

M heisst *maximaler 0-1-Unterverband* von L , falls M 0-1-Unterverband ist und für einen 0-1-Unterverband M' gilt: $M \subseteq M' \subseteq L \Rightarrow M' = M$ oder $M' = L$.

Definition A.22 – \vee - resp. \wedge -irreduzibles Element, $J(L)$

Sei L ein endlicher distributiver Verband. $x \in L$ heisst \vee -irreduzibel (Verein- oder join-irreduzibel) genau dann, wenn $x = y \vee z \Rightarrow x = y$ oder $x = z$ gilt (\wedge -irreduzibel (Schnitt- oder meet-irreduzibel) analog).

$J(L)$ (von Join-irreducible) ist die Menge aller \vee -irreduziblen Elemente von L ohne die 0.

Dual dazu kann man die Menge $M(L)$ (von Meet-irreducible Lattices) als Menge aller \wedge -irreduziblen Elemente von L ohne die 0 definieren.

Wegen der symmetrischen Natur der Verbände genügt es aber $J(L)$ zu definieren.

Satz A.23 - Maximale Unterverbände

Maximale 0-1-Unterverbände von L entsprechen bijektiv den [kritischen](#) und [schwach kritischen](#) Paaren aus $J(L)$.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 [master thesis](#) by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by [cja](#) in 2006. It was last updated on September 10, 2006.