Definitionen und Sätze

Part B: Universal Algebra 1

Viele Hilfsmittel, welche die AWB zur Verfügung stellt, befassen sich mit Begriffen der Universellen Algebra. Deshalb sollen im folgenden Abschnitt die wichtigsten mathematischen Grundlagen aus diesem Gebiet erwähnt werden.

Definition B.1 - Algebra

Unter einem *Typ* von Algebren versteht man ein geordnetes Paar (F, σ), wobei F eine Menge ist, deren Elemente *Operationssymbole* genannt werden, und $\sigma : F \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Abbildung, die jedem f in F die *Stelligkeit* $\sigma(f)$ zuordnet.

Man nennt f dann *$\sigma(f)$-stelliges Operationssymbol*.

Eine *allgemeine Algebra* (kurz: *Algebra*) vom Typ (F, σ) ist ein geordnetes Paar $\mathbf{A} = (A, F)$, bestehend aus einer Menge A und einer Menge $F = (f_{\mathbf{A}} : f \in F)$ von Operationen auf A, wobei jedem Operationssymbol $f \in F$ eine $\sigma(f)$-stellige Operation $f_{\mathbf{A}} \in \mathrm{Op}(A)$ zugeordnet wird.

Die Menge A heisst die *Grundmenge* von $\boldsymbol{A}$, und die Elemente von F heissen *fundamentale Operationen* von $\boldsymbol{A}$.

Eine Gruppe kann zum Beispiel als eine Algebra $(G, *)$ vom Typ (2) oder eine Algebra $(G, *, ^{-1}, e)$ vom Typ (2,1,0) verstanden werden. In ähnlicher Weise lassen sich nun natürlich auch Gruppoide, Halbgruppen oder Monoide definieren. Es ist jeweils zu überlegen, welche Operationen mit welchen Stelligkeiten benötigt werden, um den Typ der herzustellenden Algebra entsprechend anpassen zu können.

Ein weiteres prominentes Beispiel ist der Verband. Eine Möglichkeit, ihn zu definieren, haben wir unter Definition A.7 - Verband schon kennengelernt. Folgende Definition ist mit dieser äquivalent und bietet ein weiteres Beispiel einer Algebra.

Definition B.2 - Verband (cf. also Definition A.7 - Verband)

Ein *Verband* ist eine Algebra $(L, \vee, \wedge)$ vom Typ (2,2), die den folgenden Gleichungen genügt:

(Kommutativität)	$x \vee y = y \vee x, \; x \wedge y = y \wedge x$
(Assoziativität)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
(Idempotenz)	$x \vee x = x, \; x \wedge x = x$
(Absorption)	$x \vee (x \wedge y) = x, \; x \wedge (x \vee y) = x$

Ein *Verband mit 0 und 1* ist eine Algebra (L, $\vee$, $\wedge$, 0, 1) vom Typ (2,2,0,0) so, dass (L, $\vee$, $\wedge$) ein Verband ist und zusätzlich folgende Gleichung gilt:

(0 und 1)	$x \wedge 0 = 0,\ x \vee 1 = 1$

Definition B.3 - Distributiver Verband

Ein Verband (L, $\vee$, $\wedge$) heisst *distributiv*, falls die folgenden Distributivgesetze erfüllt sind:

(D1)	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(D2)	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Als letztes Algebra-Beispiel seien die Booleschen Algebren erwähnt. Boolesche Algebren, nach dem Mathematiker George Boole benannt, wurden entwickelt, um in der Aussagenlogik algebraische Methoden anwenden zu können. Die Operationen der Booleschen Algebra simulieren die logischen Operatoren AND, OR und NOT (oder die mengentheoretischen Verknüpfungen Durchschnitt, Vereinigung und Komplement).

Definition B.4 - Boolesche Algebra

Eine *boolesche Algebra* ist eine Algebra (B, $\vee$, $\wedge$, ', 0, 1) vom Typ (2,2,1,0,0), falls (B, $\vee$, $\wedge$) ein distributiver Verband mit 0 und 1 ist und ausserdem für jedes $x \in B$ ein $x' \in B$ existiert mit:

(Komplement)	$x \wedge x' = 0,\ x \vee x' = 1$

Definition B.5 - Meet- und Join-Pseudokomplement

Sei (L, $\vee$, $\wedge$) ein Verband mit 0 und 1. Dann heisst $x^* \in L$ das *Meet-Pseudokomplement* von x, falls $x^* = \max\{y \in L: y \wedge x = 0\}$ gilt.

Analog heisst $x^\star \in L$ das *Join-Pseudokomplement* von x, falls $x^\star = \min\{y \in L : y \vee x = 1\}$ gilt.

L heisst *meet-pseudokomplementiert* resp. *join-pseudokomplementiert*, falls jedes Element $x \in L$ ein Meet- resp. Join-Pseudokomplement besitzt.

Bemerkung B.6

In der AWB werden für die Pseudokomplemente meist die Abkürzungen *Meet-Komplement* und *Join-Komplement* verwendet.

Definition B.7 - Komplement

Sei (L, $\vee$, $\wedge$) ein Verband mit 0 und 1. Dann heisst $x^* \in L$ ein *Komplement* von x, falls gilt: $x \wedge x^* = 0$ und $x \vee x^* = 1$.

Besitzt jedes Element $x \in L$ ein Komplement x^*, so heisst der Verband *komplementiert*.

Bemerkung B.8 - Komplementbehauptung

Sei (B, $\vee$, $\wedge$, ', 0, 1) eine Boolesche Algebra. Für jedes $x \in B$ fallen das Meet-Pseudokomplement, das Join-Pseudokomplement und das Komplement zusammen.

Der Beweis zu dieser Bemerkung ist in keiner der erwähnten Quellen zu finden. Deshalb haben wir ihn hier aufgeführt: Beweis einer Komplement-Behauptung.

Definition B.9 - Halbverband

Existiert in einem poset S für jedes Paar $x,y \in S$ das Infimum inf(x,y), dann nennt man S einen *Schnitt-Halbverband* (kurz: *Halbverband*).

Definition B.10 - Skelett

Das *Skelett* eines pseudokomplementierten Halbverbandes S (kurz: *PCS*) ist die Menge $S^* = \{x^* : x \in S\}$ aller Pseudokomplemente von S.

Definition B.11 - Fast rigider PCS

Ein pseudokomplementierter Halbverband S wird *fast rigid* genannt, falls $|End^+(S)| = 1$ gilt, wobei $End^+(S)$ definiert ist durch $End^+(S) := \{\phi \in Hom(S,S) : \phi(S) \not\subseteq S^*\}$. In Worten: Der PCS S heisst *fast rigid*, falls genau ein Endomorphismus (nämlich die Identität) Bildelemente hat, welche nicht im Skelett von S liegen.

Wie für so manche mathematische Struktur dürfen auch von Algebren Unterstrukturen erwarten werden. Sie werden wie folgt definiert:

Definition B.12 - Unteralgebra

Es sei $\mathbf{A} = (A, F)$ eine Algebra vom Typ F, und $B \subseteq A$ eine Teilmenge von A mit der Eigenschaft, dass $f_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$ für alle $f \in F$ und alle n-Tupel $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ ($\sigma(f) = n$ gesetzt).

Die Algebra $\mathbf{B} = (B, (f_{\mathbf{B}} : f \in F))$ heisst dann *Unteralgebra* von $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, wobei $f_{\mathbf{B}} : B^n \rightarrow B$ für alle $f \in F$ als Einschränkung von f_A auf die Menge B definiert ist.

Mit Sub$\mathbf{A}$ wird die Menge aller Grundmengen von Unteralgebren von $\mathbf{A}$ bezeichnet, d.h. Sub$\mathbf{A} = \{B : \mathbf{B} \leq \mathbf{A}\}$.

Satz B.13

Es sei **A** eine Algebra. Dann gilt:

a. $A \in \mathrm{Sub}\mathbf{A}$,
b. $\bigcap \mathcal{B} \in \mathrm{Sub}\mathbf{A}$ für jede nichtleere Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Sub}\mathbf{A}$.

Satz B.14 - Unteralgebrenverband

Für jede Algebra **A** ist $(\mathrm{Sub}\mathbf{A}, \vee, \wedge)$ ein Verband (der *Unteralgebrenverband* von **A**).

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on July 19, 2006.