Definitionen und Sätze

Part B: Universal Algebra 2

Abbildungen von der einen in die andere Struktur werden Morphismen genannt. Wie in vielen anderen mathematischen Gebieten werden auch hier verschiedene Morphismen unterschieden.

Definition B.15 - Morphismen

Es seien **A** und **B** Algebren desselben Typs *F*. Eine Abbildung ϕ : **A** → **B** heisst *Homomorphismus* von **A** nach **B**, falls für alle $f \in F$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ ($n = \sigma(f)$) die folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\phi f_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f_{\mathbf{B}}(\phi a_1, \ldots, \phi a_n)$$

Ein bijektiver Homomorphismus $\phi : A \to \mathbf{B}$ heisst *Isomorphismus* von **A** nach **B**, **A** ≅ **B**, falls auch die Umkehrabbildung ein Homomorphismus ist.

Surjektive Homomorphismen heissen *Epimorphismen*. Ist ϕ : **A** → **B** ein Epimorphismus, so wird **B** *homomorphes Bild* von **A** genannt ($\phi\mathbf{A} = \mathbf{B}$).

Injektive Homomorphismen werden *Einbettungen* genannt und ein Homomorphismus einer Algebra **A** in sich selbst heisst *Endomorphismus*. Ein Endomorphismus, der gleichzeitig bijektiv, also ein Isomorphismus ist, heisst *Automorphismus*.

Bemerkung B.16

In der AWB kann gewählt werden, welche Operationen auf einer Struktur durch einen Morphismus erhalten bleiben sollen. Sind zum Beispiel alle Homomorphismen zwischen zwei posets gefragt, sollte "Order" erhalten bleiben.

Die Rolle, welche in der Gruppentheorie von Normalteilern beziehungsweise in der Ringtheorie von Idealen übernommen wird, spielen hier in der verallgemeinerten Situation die Kongruenzrelationen. Um diese einzuführen, ist es nötig zu wissen, was eine Äquivalenzrelation ist.

Definition B.17 - Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Teilmenge $R \subseteq A_2$ heisst eine *Äquivalenzrelation auf A*, falls für alle x, y, z ∈ A folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(Reflexivität)	$(x,x) \in \Theta$
(Symmetrie)	$(x,y) \in \Theta \to (y,x) \in \Theta$
(Transitivität)	$(x,y) \in \Theta$ und $(y,z) \in \Theta \to (x,z) \in \Theta$

Für eine Äquivalenzrelation Θ heissen die Mengen $[a]_\Theta = \{x \in A : (x,a) \in \Theta\}$ *Äquivalenzklassen*. Jedes Element aus A gehört zu genau einer Äquivalenzklasse von Θ.

Zwei wichtige Äquivalenzrelationen sind die *Allrelation* $\nabla_A := A^2$ und die *Diagonale* $\Delta_A := \{(a,a) : a \in A\}$.

Satz B.18

Es sei A eine Menge und $\mathcal{R}$ eine nichtleere Teilmenge von EqA. Dann gilt: $\bigcap \mathcal{R} \in \mathrm{Eq}A$.

Satz B.19 - Äquivalenzrelationenverband

Für jede Menge A ist (EqA, $\vee$, $\wedge$) ein Verband (der *Äquivalenzrelationenverband auf A*).

Definition B.20 - Kongruenz

Sei A eine Menge, $\Theta \in \mathrm{Eq}A$, $f \in \mathrm{Op}_n(A)$. Dann heissen Θ und f *verträglich*, falls für alle $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ mit $a_1\Theta b_1, \ldots, a_n\Theta b_n$ immer

$$f(a_1, \ldots, a_n)\Theta f(b_1, \ldots, b_n)$$

gilt. Man nennt $\Theta \in \mathrm{Eq}A$ eine *Kongruenzrelation* (kurz: *Kongruenz*) auf der Algebra $\mathbf{A} = (A, F)$, falls Θ mit allen $f \in F$ verträglich ist.

Die Menge aller Kongruenzrelationen auf $\mathbf{A}$ wird mit $\mathrm{Con}\mathbf{A}$ bezeichnet.

Bemerkung B.21 - Schnitt in Kongruenzklasse

Sind zwei Elemente x und y eines Verbandes in derselben Kongruenzklasse, so gehören auch deren Schnitt $x \wedge y$ und Verein $x \vee y$ zu dieser Klasse.

Sind zwei Elemente u und v mit $u < v$ in derselben Kongruenzklasse, so gehört auch jedes Element $w \in [u,v]$ in diese Klasse.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on July 19, 2006.