Definitionen und Sätze

Part B: Universal Algebra 3

Zu überprüfen, ob eine Relation eine Kongruenz ist oder nicht, kann je nach Situation sehr aufwändig sein. Eine hinreichende Bedingung für die Verträglichkeit mit allen fundamentalen Operationen der Algebra **A** lässt sich mit Hilfe der Translationen von **A** formulieren.

Definition B.22 - Translation

Sei **A** = (A, F) eine Algebra. Eine Abbildung der Form x $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ mit $f \in F$ und $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$, heisst *Translation* von **A**.

Bemerkung B.23

Eine Translation von **A** gehört im Allgemeinen nicht zu den fundamentalen Operationen F von **A**.

Satz B.24

Für jede Algebra **A** = (A,F) gilt: $\Theta \in \mathrm{Eq}A$ ist genau dann eine Kongruenzrelation von **A**, wenn Θ mit allen Translationen von **A** verträglich ist.

Definition B.25 - Einfache Algebra

Eine Algebra **A** = (A,F), die ausser $\Delta_{\mathbf{A}}$ und $\nabla_{\mathbf{A}}$ keine weiteren Kongruenzrelationen hat, heisst *einfach*.

Definition B.26 - Kern

Es sei $\phi : A \to B$ eine Abbildung. Dann ist der *Kern* von ϕ definiert als $\mathrm{Kern}\phi := \{(a,b) \in A^2 : \phi a = \phi b\}$.

Satz B.27 - Satz über Kern von Homomorphismen

Für jeden Homomorphismus $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ist $\mathrm{Kern}\phi$ eine Kongruenzrelation auf **A**. Es gilt sogar noch mehr: Die Kongruenzrelationen auf einer Algebra **A** sind genau die Kerne von Homomorphismen mit Start **A**.

Definition B.28 - 0-1-trennend, 0-1-einfach

Sei L ein Verband mit grösstem Element 1 und kleinstem Element 0. Ein Homomorphismus $\phi : L \to L'$ von L in einen Verband L' heisst 0-trennend resp. 1-

trennend, falls $\phi^{-1}\{\phi(0)\} = \{0\}$ resp. $\phi^{-1}\{\phi(1)\} = \{1\}$ gilt.

Man nennt ϕ *0-1-trennend*, falls ϕ sowohl 0-trennend wie auch 1-trennend ist. Der Verband L heisst *0-1-einfach*, falls jeder nichtkonstante Homomorphismus $\phi : L \to L'$ 0-1-trennend ist.

Bemerkung B.29 - 0-1-einfach

Aufgrund von Satz B.27 ist ein Verband L mit 0 und 1 genau dann 0-1-trennend, wenn alle von ∇_L verschiedenen Kongruenzen von L die Mengen $\{0\}$ und $\{1\}$ als Kongruenzklassen haben.

Was für Algebren und äquivalenzrelationen gilt, ist auch für Kongruenzrelationen richtig:

Satz B.30 - Kongruenzverband

Es sei $\mathbf{A}$ eine Algebra und $\mathcal{R}$ eine nichtleere Teilmenge von Con$\mathbf{A}$. Dann gilt: $\cap\, \mathcal{R} \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$.

Und: Für jede Algebra $\mathbf{A}$ ist (Con$\mathbf{A}$, $\vee$, $\wedge$) ein Unterverband von (EqA, $\vee$, $\wedge$). Insbesondere ist (Con$\mathbf{A}$, $\vee$, $\wedge$) ein Verband (der *Kongruenzverband* von $\mathbf{A}$).

Definition B.31 - Intervall

Sei L ein Verband, a, b $\in$ L. Das *Intervall* [a,b] ist wie folgt definiert: $[a,b] = \{x : x \in L,\ a \le x \le b\}$

Satz B.32

Sei L ein Verband, Θ eine Kongruenz auf L. Dann ist jede Kongruenzklasse von Θ ein Intervall auf L. Falls $[x_1] = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, dann ist

$$[x_1]_\Theta = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p,\ x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_p]$$

Die Kongruenz Θ auf L ist ein Unterverband von L.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on July 19, 2006.