

## Ergänzungen

### Part C: Vermutung über 0-1-einfache Verbände

Im [Problem \ref{0-1-Problem}](#) wurde darauf hingewiesen, dass bezüglich nicht-einfachen, 0-1-einfachen Verbänden eine Vermutung entstanden ist. Diese soll hier als Satz formuliert und bewiesen werden (siehe auch [Definition B.25 - Einfache Algebra](#), [Definition B.28 - 0-1-einfach](#) und [Remark B.29 - 0-1-einfach](#)).

#### Proposition C.1 - Satz 0-1-einfach

Sei  $M$  der in [Abbildung C.3](#) dargestellte [Verband](#) und seien die drei Schritte  $S1$ ,  $S2$  und  $S3$  gegeben, welche auf einen Verband  $L$  mit 0 und 1 angewendet werden können:

- S1:** Spalten eines Punktes in einer [Kette](#) zwischen 0 und 1. Sei  $x \in C \in L$  ein Punkt in einer Kette zwischen 0 und 1, für welche gilt: Jedes  $c \in C$  hat genau einen unteren [Nachbarn](#)  $c_u$  und genau einen oberen Nachbarn  $c_o$ . Schiebe einen neuen Punkt  $x'$  zwischen  $x$  und  $x_u$ , so dass  $x_u < x' < x < x_o$  gilt.
- S2:** Hinzufügen eines Punktes zwischen 0 und 1. Füge dem Verband  $L$  einen neuen Punkt  $x$  mit  $0 < x < 1$  hinzu, der mit allen anderen Elementen  $y \in L \setminus \{0,1\}$  [unvergleichbar](#) ist.
- S3:** Einkleben eines Verbandes zwischen zwei Punkte in einer Kette zwischen 0 und 1. Seien  $x, y \in C \in L$  zwei benachbarte Punkte ( $x < y$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 1$ ) in einer Kette zwischen 0 und 1, für welche gilt: Jedes  $c \in C$  hat genau einen unteren Nachbarn  $c_u$  und genau einen oberen Nachbarn  $c_o$ . Schiebe einen nicht-einfachen [Verband](#)  $L'$  mit einem [minimalen Element](#)  $0_{L'}$  und einem maximalen Element  $1_{L'}$  so zwischen  $x$  und  $y$ , dass  $y = 0_{L'}$  und  $x = 1_{L'}$  gelten.

Dann gilt:

- a.  $M$  ist der kleinste nicht-einfache, 0-1-einfache Verband.
- b. Werden in beliebiger Reihenfolge und mit beliebig häufigen Wiederholungen die Schritte  $S1$ ,  $S2$  und  $S3$  auf den Verband  $M$  angewendet, ist das Resultat immer ein nicht-einfacher, 0-1-einfacher Verband.

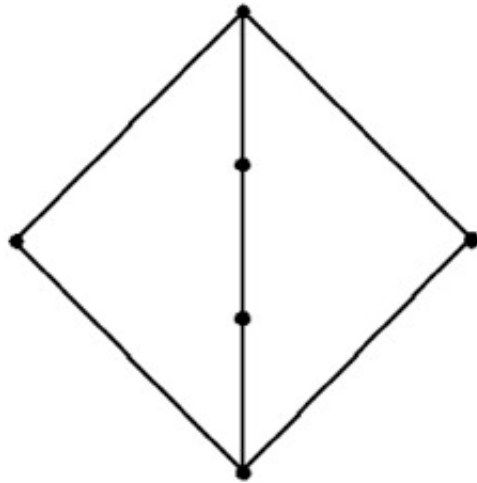


Abbildung C.3: Der Verband M

### Beweis C.1

Um zu zeigen, dass der Verband M der kleinste mit der gewünschten Eigenschaft ist, ist zu überlegen, wie Verbände, die kleiner oder gleich gross sind, aussehen.

[Abbildung C.4](#) zeigt diese Verbände.

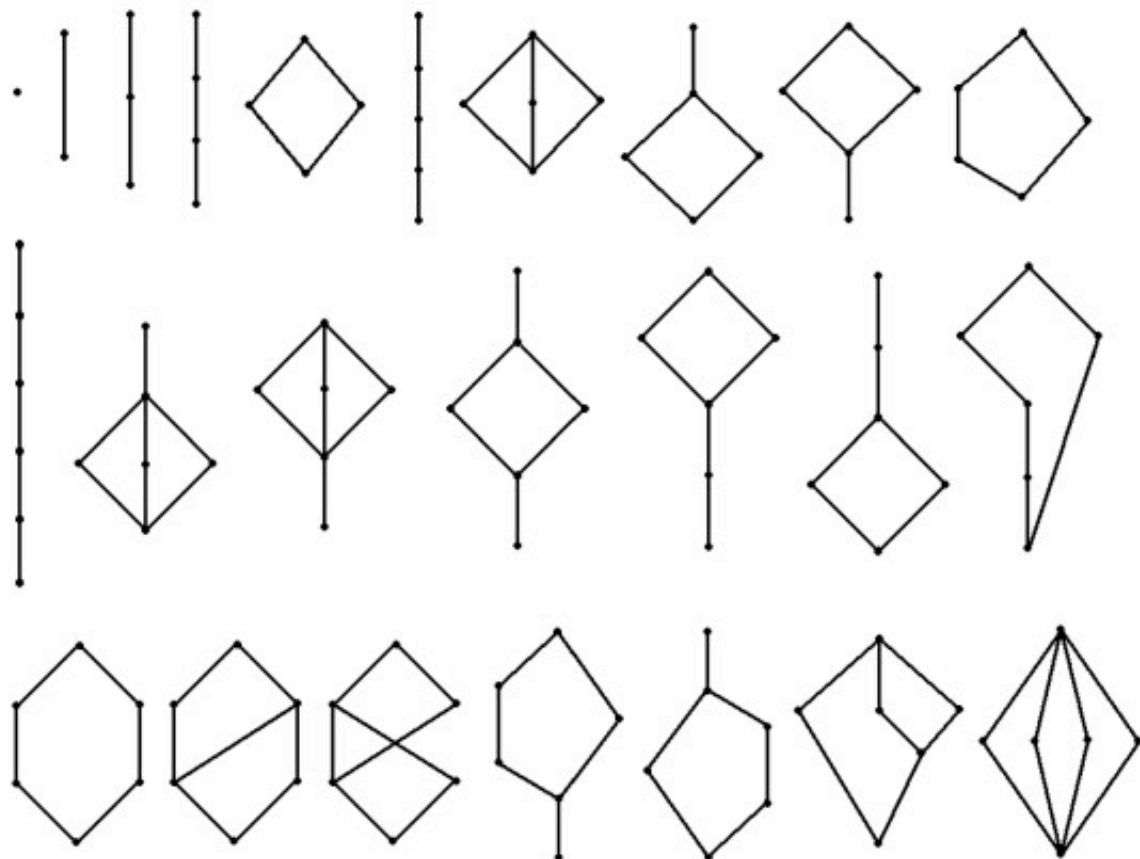


Abbildung C.4: Alle Verbände mit bis zu sechs Elementen (ohne Verband M)

Es lässt sich einfach nachprüfen (mit Hilfe der [Kongruenzenberechnung](#) der AWB), dass keiner der Verbände mit höchstens 6 Elementen, ausser dem Verband M

natürlich, sowohl nicht-einfach wie auch 0-1-einfach ist. Also muss der Verband  $M$  der kleinste dieser Art sein.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Schritte S1, S2 und S3 diese Eigenschaften erhalten. Folgender Satz wird bei diesem Unterfangen behilflich sein:

### Satz C.2 - Drei-Stränge Behauptung

Jeder Verband, der aus mindestens drei Strängen zusammengeklebt wurde, ist 0-1-einfach. Dabei ist ein *Strang* ein Verband  $L$ , dessen Maximum  $1_L$   $\vee$ -irreduzibel und dessen Minimum  $0_L$   $\wedge$ -irreduzibel ist (siehe [Definition A.20 -  \$\vee\$ - resp.  \$\wedge\$ -irreduzibel](#)).

Zusammengeklebt werden die Stränge  $L_1, \dots, L_n$  durch die Vereinigung  $L_i$ , wobei ihre grössten Elemente  $1_{L_1}, \dots, 1_{L_n}$  miteinander identifiziert werden und ihre kleinsten Elemente  $0_{L_1}, \dots, 0_{L_n}$  miteinander identifiziert werden.

### Beweis C.2

Sei  $K$  ein Verband mit mindestens drei Strängen und  $x \in K \setminus \{0, 1\}$  ein Element, für welches gilt:  $x \theta 1$  für ein  $\theta \in \text{Con}K$ . Wähle nun ein mit  $x$  unvergleichbares Element  $y \in K$  und setze  $a_1 := x$ ,  $a_2 := y$ ,  $b_1 := 1$  und  $b_2 := y$ . Es gilt also  $a_1 \theta b_1$  und  $a_2 \theta b_2$ . Weil die Kongruenz  $\theta$  Schnitt und Verein erhält, gilt  $0 = a_1 \wedge a_2 \theta b_1 \wedge b_2 = y$ . Jedes  $y \in K \setminus \{1, x\}$  gehört also zur selben Kongruenzklasse wie die 0.

Weil  $K$  mindestens drei Stränge besitzt, gibt es unter ebendiesen Elementen zwei unvergleichbare Elemente  $y_1$  und  $y_2$ , für welche  $y_1 \vee y_2 = 1$  gilt. Nach [Bemerkung B.21](#) muss also die 1 und damit alle Elemente von  $K$  zur selben Kongruenzklasse gehören wie die 0. Also gilt  $\theta = \nabla_K$ .

Analog lässt sich zeigen, dass aus  $x \theta 0$  für ein  $\theta \in \text{Con}K$  die Gleichheit  $\theta = \nabla_K$  folgen muss.

In  $K$  gibt es also keine Kongruenz (ausser  $\nabla_K$ ), bei welcher sich die 1 oder die 0 mit anderen Elementen des Verbandes die Klasse teilen müssen.  $K$  muss also ein 0-1-einfacher Verband sein - und der [Satz C.2](#) ist bewiesen. ■

Der "Ausgangsverband"  $M$  besteht aus mindestens drei Strängen. An dieser Tatsache vermögen alle drei Schritte S1, S2 und S3 nichts zu verändern: Beim Spalten eines Punktes in einer Kette zwischen 0 und 1 bleibt die Anzahl der Stränge konstant (S1). Beim Hinzufügen eines Punktes zwischen 0 und 1 wird die Anzahl der Stränge um 1 erhöht (S2). Das Einkleben eines Verbandes zwischen zwei Punkte in einer Kette zwischen 0 und 1 verändert die Anzahl der Stränge nicht. Also ist jeder Verband, der ausgehend vom Verband  $M$  mittels Konstruktion aus [Satz 3.1](#) gebildet wird, 0-1-einfach.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die so konstruierten Verbände nicht-einfach sind. Aufgrund der Gestalt vom Verband  $M$  und den Schritten  $S1$  bis  $S3$  ist klar, dass ein nach [Satz 3.1](#) konstruierter Verband  $M'$  immer einen Strang  $L \subseteq M'$  besitzen muss, der nebst den extremen Elementen  $0_L \cong 0$  und  $1_L \cong 1$  mehr als nur ein einziges Element besitzt. Es gibt also eine Kongruenz von  $M'$ , welche alle Elemente von  $x \in L \setminus \{0,1\}$  miteinander identifiziert, während alle restlichen Elemente (insbesondere die  $0$  und die  $1$ ) selbst eine Klasse bilden. Diese Kongruenz entspricht aber weder  $\Delta_{M'}$  noch  $\nabla_{M'}$ . Der Verband  $M'$  ist also nicht einfach. Damit ist der [Satz C.1](#) bewiesen. ■

Es ist naheliegend zu fragen, ob jeder nicht-einfache, 0-1-einfache Verband mit der Konstruktion aus [Satz C.1](#) erstellt werden kann. Folgendes Beispiel zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist.

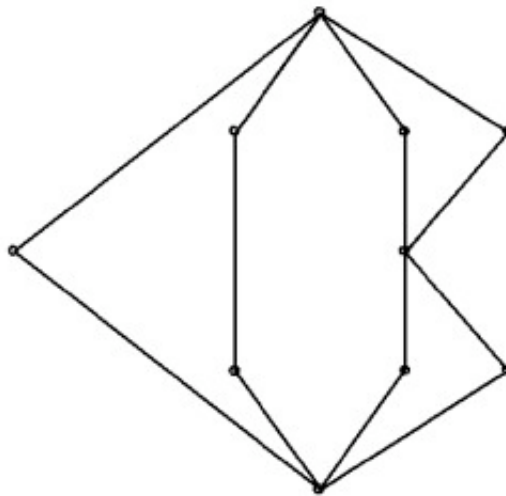


Abbildung C.5: Verband mit zwei verbundenen Strängen

Der Verband in der Abbildung C.5 kann nicht durch Zusammenkleben von Strängen gebildet werden (siehe [Satz C.2](#)). Weil er zwei Stränge besitzt, die nicht nur bei  $0$  und  $1$  miteinander verklebt sind, kann er nicht ausgehend von  $M$  mithilfe der Schritte  $S1$ ,  $S2$  und  $S3$  erreicht werden.

Also ist durch den [Satz C.1](#) eine Konstruktion gegeben, mit der beliebig viele nicht-einfache, 0-1-einfache Verbände konstruiert werden können, die aber nicht zu allen solchen Verbänden führt.

---

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by [cja](#) in 2006. It was last updated on July 22, 2006.