Ergänzungen

Part C: Beweis einer Komplement-Behauptung

Zu beweisende Behauptung:

> Remark B.8 - Komplementbehauptung
>
> Sei $*$ ein Schnitt-Pseudokomplement auf der Booleschen Algebra $\mathbf{B} = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$. Dann ist auch $\mathbf{B'} = (B, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra.

Wir überlegen uns zuerst, dass in der Algebra **B** für alle $a, b \in B$ folgende Aussage gelten muss:

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow a \leq b' \qquad \text{(C.1)}$$

Sei also $a \wedge b = 0$. Mit den uns bekannten Regeln können wir die folgenden Schlüsse ziehen:

$$a \wedge b = 0$$
$$\Rightarrow (a \wedge b) \vee a' = a'$$
$$\Rightarrow (a' \vee a) \wedge (a' \vee b) = a'$$
$$\Rightarrow 1 \wedge (a' \vee b) = a'$$
$$\Rightarrow a' \vee b = a'$$
$$\Rightarrow a \wedge b' = a$$
$$\Rightarrow a \leq b'$$

Aus der Definition des Schnitt-Pseudokomplements (Defintion B.5) geht zudem folgende Tatsache hervor:

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow b \leq a^* \qquad \text{(C.2)}$$

Auf der einen Seite wissen wir, dass $a \wedge a^* = 0$ gilt. Aufgrund der Tatsache in C.1 folgt nun, dass auch $a^* \leq a'$ gelten muss. Auf der anderen Seite gilt natürlich auch $a \wedge a' = 0$. Mit der Implikation in C.2 erhalten wir $a' \leq a^*$.

Somit haben wir bewiesen, dass das Schnitt-Pseudokomplement $*$ genau dem Komplement $'$ entspricht. Also muss $\mathbf{B'}$ eine Boolesche Algebra sein.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The

translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on July 21, 2006.