AWB — Algebra WorkBench

Definitions and Propositions

Part B: Universal Algebra 4

Aus gegebenen Algebren sollen oft neue konstruiert werden. Mit dem bisherigen Wissen können homomorphe Bilder und auch Unteralgebren gebildet werden, welche aber immer gleich gross oder kleiner als die ursprüngliche Algebra sind. Mit der Einführung des direkten Produkts eröffnet sich die Möglichkeit, aus bestehenden Algebren grössere zu gewinnen.

Definition B.33 - Direktes Produkt

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ seien Algebren des Typs F. Das *direkte Produkt* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ist definiert als die Algebra mit Grundmenge B × C und den für jedes $f \in F$ (sei $\sigma(f)$ = n) durch

$$f_{\mathbf{A}\times\mathbf{C}}((a_1, {}_b1), \ldots, (a_n, b_n)) := (f_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f_{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n))$$

definierten fundamentalen Operationen.

Remark B.34

Das direkte Produkt lässt sich auch verallgemeinern: Für die Algebren $\mathbf{A}_i$, $i \in I$ wird das direkte Produkt dann als $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ geschrieben. Die fundamentalen Operationen werden komponentenweise definiert.

Definition B.35 - Subdirektes Produkt

Die Algebren $\mathbf{A}_i$, $i \in I$ seien alle vom selben Typ. Eine Unteralgebra $\mathbf{B}$ von $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ heisst ein *subdirektes Produkt* der $\mathbf{A}_i$ falls $\alpha_j(\mathbf{B}) = \mathbf{A}_j$ für alle $j \in I$. Hierbei bezeichnet α_j die Projektionsabbildung von $\mathbf{A}_i$, $i \in I$ auf $\mathbf{A}_j$.

Proposition B.36 - Irreduzibles subdirektes Produkt

Eine Algebra $\mathbf{A}$ ist genau dann *subdirekt irreduzibel* (nicht als ein echtes subdirektes Produkt darstellbar), wenn $\mathbf{A}$ trivial ist (d.h. höchstens ein Element besitzt) oder wenn in Con$\mathbf{A}$ gilt: $\Delta_A \neq \bigcap(\text{Con}\mathbf{A} \setminus \{\Delta_A\})$. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn Δ_A in Con$\mathbf{A}$ genau einen oberen Nachbarn hat (siehe Abbildung B).

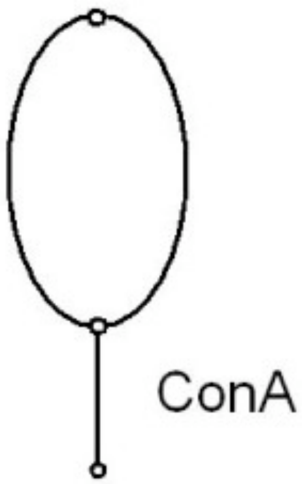

Abbildung B: Kongruenzverband einer subdirekt irreduziblen Algebra

Proposition B.37 - Irreduzibles subdirektes Produkt 2

Sei **A** eine Algebra und Θ eine Kongruenz auf **A**. **A**/Θ ist genau dann subdirekt irreduzibel, wenn $x,y \in A$ existieren mit $x \neq y \pmod{\Theta}$ und $x = y \pmod{\Psi}$ für jede Kongruenz Ψ auf **A** mit $\Theta \subset \Psi$.

Proposition B.38 - Satz von Birkhoff

Jede Algebra ist isomorph zu einem subdirekten Produkt subdirekt irreduzibler Algebren.

The computer program "Algebra Workbench" (AWB) was created by Markus Sprenger. The documentation found here is based on a 2005 master thesis by Christoph Röthlisberger. The translation and adaptation of the material was done by Cindy-Jane Armbruster.

This page was designed by cja in 2006. It was last updated on July 19, 2006.